ממן 14 לוגיקה למדעי המחשב

שאלה 1

1. ∃x (P(x) ∧ L(x))
2. ∀x (H(x) → S(x))
3. 1. ∀x ∃y (L (x, x) → L (x, y))

2. ∀x ∀y (L (x, y) → L (x, x))

3. ∀x ∀y (L (x, y) → L (x, x))

4. ∀x ∃y (L (x, x) → L (x, y))

שאלה 2

1. הטענה נכונה – לפי הגדרה ϕ נכונה במודל אם היא נכונה עבור השמה S או"א לכל ההשמה S מתאימה לכל המשתנים החופשיים איבר במודל ולפי התאמה זאת הנוסחה אמתית במודל . מכיוון שלכל x הנוסחה אמתית במודל בוודאי שעבור כל השמה S הנוסחה אמתית במודל.
2. הטענה נכונה הנוסחה אמתית בהשמה S במודל כלומר קיימת השמה בה קיים a שמקיים S<x|a> שעבורה הנוסחה נכונה . ולכן בהכרח קיים x שהוא a במודל שעבורו בהשמה S הנוסחה נכונה.
3. הטענה נכונה -אםM∀xϕ אז ϕ נכונה בכל השמה . ולכן ולכן ϕ מתקיים בM .כמו כן ϕ מקיים ב M אז הוא מתקיים לכל השמה S וזו ולכן M∀xϕ .
4. הטענה לא נכונה – נראה כי קיים מודל בו ϕ M וגם ¬ϕ M. נסתכל על הנוסחה ϕ(x)= x≥10 ותחום הספרים הטבעיים עבור ההשמה ϕ אינו מתקיים במודל כי 5 < 10 ולכן ϕ M וכמו כן עבור ההשמה ϕ מקיים במודל ולכן ¬ϕ לא מתקיים במודל תחת ההשמה הזו כי 20 ≥ 10 כלומר ¬ϕ M
5. הטענה לא נכונה אם ϕ אומר שלא ניתן להוכיח את ϕ מהאקסיומות כלומר ש ϕ אינו טאטולוגיה אך אין זה אומר ש ϕ הוא סתירה . נראה דוגמא נגדית

עבור ϕ(x) = x< 10 עבור ההשמה ϕ לא נכונה במודל לכן היא אינה טאוטולוגה כלומר ϕ וכמו כן עבור ההשמה ϕ אמתית במודל ולכן היא איננה סתירה כלומר ¬ϕ .

שאלה 3

תהי ϕ נוסחה ויהיו x ו- y משתנים. בהנחה שההצבות ϕ[y/x] ו ϕ[y/x][x/y] הן כשרות, תנאי הכרחי ומספיק לכך שיתקיים השוויון

ϕ[y/x][x/y] = ϕ

הוא שy לא משתנה חופשי ב ϕ .

מספיק: נניח כי y לא משתנה חופשי ב ϕ הרי שבהצבה הכפולה ראשית מחליפים את כל

המופעים החופשיים של x בy ושנית מחליפם את כל המופעים החופשיים של y ב x מכך

שאין מכך שאין משתנים חופשיים y מלבד אלו שהוצבו במקום ה x הרי שחזרנו למשתנים החופשיים המקוריים ולכן ϕ[y/x][x/y] = ϕ כלומר זהו תנאי מספיק.

הכרחי : נניח כי ϕ[y/x][x/y] = ϕ אבל קיים ב ϕ משנה חופשי y. אז מההצבה הראשונה כל

המופעים החופשיים של x הופכים לy ובהצבה השנייה כל המופעים של y הופכים לx וכעת אין משנה חופשי y בϕ והרי זאת סתירה להנחה שקיים בϕ משתנה חופשי y . לכן התנאי הכרחי.

שאלה 4

1. הטענה נכונה

|  |  |
| --- | --- |
| 1. לפי משפט הדדוקציה |  |
| 1. לפי כלל ההצבה הישי | ∃y P(y)→P(a) |
| 1. לפי כלל ההצבה הכולל |  |
| 1. ניתוק | P(a) |
| 1. ניתוק | ∃y P(y) |
| כלומר |  |
| לפי דדוקציה |  |

1. הטענה נכונה

|  |  |
| --- | --- |
| 1. משפט הדדוקציה | ) ∃x(P(x) →Q(x)))}→ ∃x Q(x) {∃x P(x)} |
| 1. משפט הדדוקציה | (∃x(P(x) →Q(x) {∃x P(x), ∃x Q(x)} |
| 1. כלל ההצבה הישי | ∃x P(x) → P(t) |
| 1. ניתוק 3,2 | P(t) |
| 1. כלל ההצבה הישי | ∃x Q(x) → Q(q) |
| 1. ניתוק 2,6 | Q(q) |
| 1. כלל ההצבה הכולל |  |
|  |  |

1. הטענה נכונה

|  |  |
| --- | --- |
| דדוקציה | ∀x P(x) ⊢ ∀y P(y) |
| הנחה | ∀x P(x) |
| כלל ההצבה הכולל | ∀x P(x) → P(y) |
| כלל הניתוק | P(y) |
| כלל ההכללה הכולל | ∀y P(y) |
|  |  |
|  |  |

1. הטענה לא נכונה ניתן דוגמה נגדית

ניקח את תחום המספרים הטבעיים ואת היחס R(x,y) = x > y

∀y∃xR(x,y) למשל לכל y , x = y+1 אך לא קיים x כך ש ∃x∀yR(x,y) כי לכל x קים y=x+1 כך ש R(x,y) = F . ולכן ∀y∃xR(x,y)↛∃x∀yR(x,y) .

1. הטענה לא נכונה ניתן דוגמה נגדית

התחום שלנו הוא a,b כך ש a הוא גבר ו b הוא אישה ויחס A(x) אם x גבר ו B(x) אם x אישה .

ולכן ∃xA(x)=T כי A(a)=T וגם ∃xB(x)=T כי B(b)=T אבל ∃x(A(x)∧B(x))=F ) כי עבור ההשמה x=a B(x)=F ועבור ההשמה x=B A(x)=F ולכן ∃xA(x)∧∃xB(x))→∃x(A(x)∧B(x)))

שאלה 5

∃xP(x)∧∃yS(y))→∀x∀yQ(y,x)))



∀x(P(x)→∃yQ(x,y))∧ ∀x(¬P(x)→¬∃yQ(x,y))))

ב.

) )→ ∃x1R(x1,x2) (R(x1,x2 ∀x2

זהו פסוק כל המשתנים קשורים וכלן זוהי הצבה כשרה במובן הטריוואלי

) R(x1,x2)) ∨ R(x1,x2)→∀x1(P(x2) (

כאן ההצבה איננה כשרה כי כשנציב במקום ב את

נקבל משנה קשור נוסף שלא היה קיים לפני ההצבה .